Electrónica I

Guillem Borrell i Nogueras

13 de septiembre de 2008

Introducción

Estos apuntes provienen de la más absoluta desesperación de suspender la asignatura de Electrónica tantas veces que no puedo recordarlas.

Capítulo 1

Introducción a los métodos de análisis de señales

La Ingeniería Electrónica se reduce a la transformación, transporte y propagación de señales eléctricas. Estas señales se expresan como variables eléctricas: en la mayoría de los casos la intensidad que recorre un conductor o la diferencia de potencial entre dos puntos, que codifican la información.

La unión de las técnicas de la Ingeniería Electrónica con otras aplicables al proceso de señales recibe el nombre de Ingeniería de Sistemas.

En la Electrónica la información, expresada según variables eléctricas, es modificada por circuitos eléctricos expresados de una forma más abstracta en diagramas de bloques. El conjunto de dispositivos electrónicos necesarios para realizar una función recibe el nombre de Sistema Electrónico.

En este primer capítulo se analiza la base matemática necesaria para entender el efecto de los sistemas electrónicos sobre las señales.

1.1. Planteamiento del problema

Este es un pequeño repaso de las lecciones de Métodos Matemáticos para entender tanto lo que se ha contado hasta ahora como los temas que se tratarán a continuación.

En la electrónica la información se transmite mediante conductores, como muchos otros medios la ecuación que define el movimiento de electrones es la ecuación de ondas.

Suponiendo que el cable es un elemento unidimensional:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

La solución se halla por separación de variables: $u(t,x) = T(t)v(x)$

$$v(x)T''(t) = c^2 v''(x)T(t)$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)} = -k^2$$

Lo que lleva a sendos problemas de Sturm-Liouville regulares a falta de condiciones de contorno:

$$v''(x) + k^2 v(x) = 0$$
$$T''(T) + (ck)^2 T(t) = 0$$

Ambas ecuaciones pueden escribirse de una manera ligeramente distinta:

$$\mathcal{L}v + k^2 v = 0 \tag{1.1}$$

porque el operador derivada segunda es un operador lineal:

$$\frac{d^2}{dx^2}(av + bv) = a\frac{d^2 v}{dx^2} + b\frac{d^2 v}{dx^2}$$

Lo que nos permite utilizar ciertas herramientas vistas en Métodos Matemáticos.

1.1.1. Autovalores y autofunciones

Dada la matriz de un endomorfismo $\mathcal{A}$ se definen los autovalores como los escalares λ que cumplen

$$\mathcal{A}\vec{w} = \lambda\mathcal{I}\vec{w} \tag{1.2}$$

Para obtener los valores de λ independientemente de los de $\vec{w}$ se debe resolver la ecuación característica:

$$|\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}| = 0$$

que proporcionará los valores de λ para los que la ecuación 1.2 no cumple la solución trivial $\vec{w} = 0$. Una vez calculados los autovalores cada uno proporcionará un autovector que cumpla la ecuación inicial.

La ecuación 1.1 permite realizar el mismo cálculo suponiendo que las funciones son vectores de longitud infinita. El problema tendrá una ecuación característica para hallar la solución no trivial:

$$\lambda^2 + k^2 = 0$$

y unos autovalores asociados al operador lineal $\lambda = \pm jk$. Para cada autovalor existirá una autofunción que cumpla la ecuación 1.1, en este caso es la solución a la euación diferencial ordinaria lineal de segundo orden para un autovalor dado.

$$v(x) = C_1 e^{jkx} + C_2 e^{-jkx}$$

Como sabemos que k es siempre positivo podemos juntar ambas soluciones permitiendo que el autovalor sea también negativo:

$$v(x) = C_k e^{jkx}$$

Una característica importante de este tipo de problemas es que sus autofunciones forman un espacio completo en L^2, es decir, las autofunciones son una *base ortogonal de funciones* como lo es una base en un espacio vectorial y en él se puede definir una norma:

$$\langle \psi(x), \phi(x) \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(x)\overline{\phi(x)}\, dx$$

que caracteriza dicho espacio.

1.2. Señales periódicas. Desarrollo exponencial de Fourier

Si a las ecuaciones anteriores se le añaden condiciones de contorno periódicas:

Advertencia:

Esto está mal, para que las condiciones de contorno sean periódicas de verdad falta imponer que $v'(0) - v'(2\pi) = 0$ pero al imponer que el espectro es simétrico resulta redundante

$$v(0) - v(2\pi) = 0$$

Que aplicado a las autofunciones:

$$C_k \left(1 - e^{j2\pi k}\right) = 0$$

Esta ecuación tiene dos soluciones posibles, la trivial $C_k = 0$ y la que es más interesante e impone una limitación al espectro: que k debe ser un número natural. Es por esta razón que al espectro de una función periódica de periodo 2π se le suele llamar, como haremos a partir de ahora, n.

Mediante la norma definida para el espacio de funciones el cálculo de los coeficientes del desarrollo de Fourier es trivial: es la proyección de cualquier función sobre el espacio de funciones $\phi(x) = e^{jnx}$:

$$C_n = \langle f(x), \phi_n(x) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-jnx} dx$$

Llegando finalmente al *desarrollo exponencial de Fourier*, ya que sabemos que cualquier función puede expresarse como su proyección respecto a la base del espacio vectorial:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnx}$$

Cuyos coeficientes se calculan con:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-jnx} dx$$

Una particularidad del desarrollo de Fourier es el coeficiente $n = 0$. Si se expresa la fórmula del mismo:

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\; dx$$

vemos que es precisamente la media de la función en el intervalo dado. Por este motivo se le suele llamar *valor medio*.

1.2.1. Funciones de periodo distinto a 2π

Hasta ahora se ha utilizado un periodo de 2π por mantener la sencillez en el desarrollo teórico, podemos calcular la serie de Fourier para cualquier función periodica sea cual sea su periodo con este cambio de variable: $\xi = \frac{T}{2\pi}x$ donde T es el nuevo periodo.

$$f(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{j2\pi n\xi}{T}}$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(\xi)e^{\frac{j2\pi n\xi}{T}}d\xi$$

Las constantes del exponente se suelen agrupar en una constante llamada *pulsación* o *frecuencia angular* que no es más que la relación entre 2π y el periodo de la función.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

con lo que la expresión queda bastante más compacta

$$f(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\omega n\xi}$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(\xi)e^{j\omega n\xi}d\xi$$

1.2.2. Desarrollo de Fourier

A partir de esta fórmula y mediante la ecuación de Euler $e^{jx} = \cos x + i \sin x$ es muy fácil deducir la expresión del *desarrollo de Fourier*. El primer paso es descomponer la base de funciones en parte real y parte imginaria, para ello volveremos a la expresión donde el espectro se mantiene real:

$$\phi(x) = C_k e^{jkx} + C_{-k}e^{-jkx} = C_k(\cos kx + j\sin kx + C_{-k}(\cos kx - j\sin kx)$$

Juntando senos y cosenos:

$$\phi(x) = A_k \cos kx + B_k \sin kx$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx$$

con las relaciones entre coeficientes:

$$A_k = C_k + C_{-k}$$
$$B_k = j(C_k - C_{-k})$$

Puede llamarnos la atención el hecho que, mientras los coeficientes del desarrollo exponencial son complejos, los del desarrollo de Fourier son reales teniendo en cuenta que siempre estamos tratando con funciones reales.

Esta diferencia es comprensible si tenemos en cuenta que el desarrollo de Fourier también debe conservar información sobre la fase de la función. Mientras en el desarrollo exponencial la componente real e imaginaria (siempre en contrafase) están mezcladas, en el desarrollo de Fourier se separan gracias a la fórmula de Euler.

La fórmula para el cálculo de los coeficientes también es muy sencilla de deducir:

$$C_k = \langle \psi(x), \phi(x) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x)\overline{\phi(x)}\ dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x)(\cos kx + j \sin kx)\ dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) \cos kx\ dx + \frac{j}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) \sin kx\ dx$$

$$A_k = C_k + C_{-k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\ dx$$

$$B_k = j(C_k - C_{-k}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx\ dx$$

Para cualquier periodo T, utilizando la convención que el espectro en funciones periódicas suele llamarse n y la defini̇ción de pulsación w:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \omega nx + B_n \sin \omega nx$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(x) \cos \omega nx\ dx$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(x) \sin \omega nx\ dx$$

Finalmente, separando el coeficiente cero correspondiente al valor medio:

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \omega nx + B_n \sin \omega nx$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(x)\ dx$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(x) \cos \omega nx\ dx$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(x) \sin \omega nx\ dx$$

1.2.3. Ejemplo

Obtener el desarrollo exponencial de Fourier y el desarrollo de Fourier de la función $\frac{-x^2}{\pi^2} + 1$ *periódica según el intervalo* $[-\pi, \pi]$. *Comprobar que se cumplen las relaciones entre los coeficientes.*

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) e^{-i\,n\,x}\ dx = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{(2\,\pi\,n + 2\,i)\ e^{i\,\pi\,n}}{\pi^2\,n^3} - \frac{(2\,\pi\,n - 2\,i)\ e^{-i\,\pi\,n}}{\pi^2\,n^3} \right)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\cos(n\,x)\;dx = \frac{4\,(\sin(\pi\,n) - \pi\,n\,\cos(\pi\,n))}{\pi^3\,n^3}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\sin(n\,x)\;dx = 0$$

$$C_{-n} = -\frac{2\,(\pi\,n\,\cos(\pi\,n) - \sin(\pi\,n))}{\pi^3\,n^3}$$

$$C_n + C_{-n} = \frac{4\,(\sin(\pi\,n) - \pi\,n\,\cos(\pi\,n))}{\pi^3\,n^3}$$

1.3. Transformada de Fourier

Expresar una función cualquiera mediante la base $\phi(x) = e^{j\omega x}$ puede simplificar ciertos cálculos debido a que la variable independiente de la función pasa de x a ω. Sirve para realizar un cambio de base para expresar una función dada en el *espacio de la frecuencia.*

Una de las definiciones posibles de transformada de Fourier es:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}\;dx = \mathcal{F}(f)$$

a la que se asocia la transformada inversa:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega x}\;dx = \mathcal{F}^{-1}(F)$$

Al sólo tratarse de un cambio de base de funciones no existe ninguna limitación sobre el espectro, la transformada de Fourier puede aplicarse a cualquier función integrable segun Lebesgue incluso de variable compleja.

La transformada de Fourier es una operación lineal:

$$a\cdot f(t) + b\cdot g(t) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} \quad a\cdot F(\omega) + b\cdot G(\omega)$$

Algunas de sus propiedades son las siguientes

- Modulación:

$$\begin{aligned}
f(t)\cdot\cos\omega_0 t \quad &\stackrel{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0) + F(\omega-\omega_0)]\\
f(t)\cdot\sin\omega_0 t \quad &\stackrel{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{i}{2}[F(\omega+\omega_0) - F(\omega-\omega_0)]\\
f(t)\cdot e^{i\omega_0 t} \quad &\stackrel{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} \quad F(\omega-\omega_0)
\end{aligned}$$

- Convolución:

$$(f*g)(t) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} \quad F(\omega)\cdot G(\omega)$$

- Cambio de escala:

$$f(at) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right), \qquad a\in\mathcal{R}, a\neq 0$$

- Teorema del retardo:

$$f(t-t_0) \quad \overset{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} \quad e^{-i\omega t_0} \cdot F(\omega)$$

- Identidad de Parseval: la norma se mantiene con el cambio de base, esto significa que la transformación es un isomorfismo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \overline{g(t)}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot \overline{G(\omega)}\, d\omega$$

1.3.1. Cálculo operacional

Una de las ventajas de operar con la representación en el espacio de la frecuencia de una función es que las operaciones de derivación se simplifican definitivamente. La derivada de una función en el espacio de Fourier es:

$$\frac{d^n}{dt^n}(f) \quad \overset{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} \quad (j\omega)^n F$$

Esto significa que cualquier ecuación diferencial se reducirá a una un polinomio en el espacio de la frecuencia.

1.3.2. Espectro de potencia y energía.

Dada una función periodica, cada frecuencia tendrá asociada una energía

1.4. Transformada discreta de Fourier, DFT

La transformada de Fourier debe aplicarse a una función continua puesto que su cálculo conlleva una integral. Sin embargo se puede expresar una serie discreta de datos en el espacio de la frecuencia mediante la transformada discreta de Fourier o DFT definida como:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}kn} \qquad k = 0, \dots, N-1$$

1.5. Transformada rápida de Fourier, FFT

La Transformada Rápida de Fourier, conocida por sus siglas en inglés FFT (*Fast Fourier Transform*) es un algoritmo numérico que calcula la transformada discreta de Fourier. Del algoritmo se obtiene tantos coeficientes como elementos tenga la muestra de datos.

Es un algoritmo muy eficiente[1] y es uno de los más importantes dentro del análisis numérico. Es también una operación imprescindible para filtrar o descodificar señales.

1.5.1. Ejemplo

Calcular la transformada rápida de Fourier de la función rectangular por una serie de 100 datos y comparar el resultado con la función sinc.

[1] Para una muestra de N elementos el número de operaciones necesarias para calcular una FFT es del orden de $N \log N$. Para tener una idea intuitiva de lo que esto significa factorizar una matriz es un algoritmo que requiere N^2 operaciones e invertir una matriz N^3.

1.6. Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es otra transformación integral que puede considerarse una generalización de la de Fourier. Se define como:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

donde $s = \sigma + i\omega$ es un exponente complejo. Se define también la antitransformada como:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\cdot\infty}^{\gamma + i\cdot\infty} e^{st} F(s)\, ds$$

Las propiedades de esta transformada la hacen muy apropiada para el análisis de sistemas dinámicos descritos por sistemas de EDO. Algunas de las destacables son [2]:

	Espacio temporal	Espacio de frecuencias
Linealidad	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
Derivada en frecuencias	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
Derivada	$f'(t)$	$sF(s) - f(0^-)$
Derivada segunda	$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$
Derivada enésima	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - \cdots - f^{(n-1)}(0^-)$
Integración en frecuencias	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\sigma)\, d\sigma$
Integración	$\int_0^t f(\tau)\, d\tau = u(t) * f(t)$	$\frac{1}{s} F(s)$
Cambio de escala	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Salto de frecuencia	$e^{at} f(t)$	$F(s - a)$
Retardo	$f(t-a)H(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
Convolución	$(f * g)(t)$	$F(s) \cdot G(s)$

Cuadro 1.1: Algunas propiedades de la transformada de Laplace

1.6.1. Ejemplo

Supongamos que tenemos un sistema que se comporta según la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + 3y' = \sin x$$

Sabiendo que los valores iniciales del resultado y de la derivada son nulos determinar la solución de la ecuación diferencial

El primer paso es realizar la transformada de Laplace de la ecuación:

$$\mathcal{L}[y'' + 3y'] = s^2 Y + 3sY = \frac{1}{s^2 + 1} = \mathcal{L}[\sin x]$$

Para obtener la solución basta con resolver la ecuación par Y

$$Y = \frac{1}{(s^2 + 1)\,(s^2 + 3)}$$

Expresar la función racional en forma de suma de fracciones parciales:

[2] $u(t)$ es la función escalón unidad de Heaviside

Función	Espacio temporal	Espacio de frecuencias	Validez
Retraso	$\delta(t-\tau)$	$e^{-\tau s}$	
Delta de Dirac	$\delta(t)$	1	$\forall s$
Cambio de frecuencia	$\frac{(t-\tau)^n}{n!}e^{-\alpha(t-\tau)}\cdot u(t-\tau)$	$\frac{e^{-\tau s}}{(s+\alpha)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
Potencia enésima	$\frac{t^n}{n!}\cdot u(t)$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
Potencia	$\frac{t^q}{\Gamma(q+1)}\cdot u(t)$	$\frac{1}{s^{q+1}}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
Función Heaviside	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
Función Heaviside	$u(t-\tau)$	$\frac{e^{-\tau s}}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
Función rampa	$t\cdot u(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
Cambio de frecuencia	$\frac{t^n}{n!}e^{-\alpha t}\cdot u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}\{s\}>-\alpha$
Descenso exponencial	$e^{-\alpha t}\cdot u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\mathrm{Re}\{s\}>-\alpha$
Exponencial negativa	$(1-e^{-\alpha t})\cdot u(t)$	$\frac{\alpha}{s(s+\alpha)}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
Seno	$\sin(\omega t)\cdot u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
Coseno	$\cos(\omega t)\cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
Seno hiperbólico	$\sinh(\alpha t)\cdot u(t)$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>\lvert\alpha\rvert$
Coseno hiperbólico	$\cosh(\alpha t)\cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>\lvert\alpha\rvert$
Onda atenuada	$e^{\alpha t}\sin(\omega t)\cdot u(t)$	$\frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>\alpha$
Onda atenuada	$e^{\alpha t}\cos(\omega t)\cdot u(t)$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>\alpha$
Raíz enésima	$\sqrt[n]{t}\cdot u(t)$	$s^{-(n+1)/n}\cdot\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
Logaritmo neperiano	$\ln\left(\frac{t}{t_0}\right)\cdot u(t)$	$-\frac{t_0}{s}[\ln(t_0 s)+\gamma]$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
Función de Bessel	$J_n(\omega t)\cdot u(t)$	$\frac{\omega^n\left(s+\sqrt{s^2+\omega^2}\right)^{-n}}{\sqrt{s^2+\omega^2}}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$ $(n>-1)$
Función de Bessel	$I_n(\omega t)\cdot u(t)$	$\frac{\omega^n\left(s+\sqrt{s^2-\omega^2}\right)^{-n}}{\sqrt{s^2-\omega^2}}$	$\mathrm{Re}\{s\}>\lvert\omega\rvert$
Función de Bessel	$Y_0(\alpha t)\cdot u(t)$	$-\frac{2\sinh^{-1}(s/\alpha)}{\pi\sqrt{s^2+\alpha^2}}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$

Cuadro 1.2: Tabla de transformadas de Laplace frecuentes

$$Y=\frac{1}{2\,(s^2+1)}-\frac{1}{2\,(s^2+3)}$$

Y calcular la antitransformada mediante la tabla 1.2:

$$y=\frac{\sin x}{2}-\frac{\sin\left(\sqrt{3}\,x\right)}{2\sqrt{3}}$$

1.7. Sistemas LTI continuos

LTI son las siglas de *Linear Time-Invariant*. Un sistema dinámico $y=L(x)$ es LTI cuando cumple las siguientes condiciones:

- Linealidad: Si la entrada del sistema es:

$$x(t)=c_1\;x_1(t)+c_2\;x_2(t)$$

  la salida deberá ser

$$y(t) = c_1\ y_1(t) + c_2\ y_2(t)$$

- El resultado no dependerá de los cambios de referencia de tiempos. Si la entrada es $x(t-\tau)$ la salida será $y(t-\tau)$

Algunas posibles propiedades adicionales de estos sistemas son:

Causalidad Un sistema es causal cuando no existe ninguna dependencia del estado futuro de su entorno. Es una condición aparentemente lógica porque no exsite nada en la naturaleza que pueda predecir el futuro.

Estabilidad Significa que las variables independientes deben ser integrables segun Lebesgue, esto es, las variables no pueden diverger a infinito. También es una condición que tiene que ver con la naturaleza porque no hay ningún sistema que tienda a energía infinita.

1.7.1. Ejemplo de sistema LTI

Uno de los sistemas más simples es la derivada primera de una función. Es trivial comprobar que cumple las dos condiciones. También lo es la derivada enésima con lo que el operador descrito en el ejemplo 1.6.1 sería un sistema LTI.

Pon más ejemplos

1.7.2. Respuesta a impulso

Como ya hemos visto, la transformada de Laplace permite analizar cualquier sistema que pueda describirse mediante ecuaciones diferenciales los sistemas LTI tienen una característica que permite analizarlos incluso sin conocer la ecuación que los describe.

Antes de entrar en detalles volvamos al ejemplo 1.6.1. Supongamos que queremos deducir la respuesta del sistema ante cualquier entrada $x(t)$ y no sólo la función seno. Podemos realizar exactamente el mismo cálculo hasta el punto de la antitransformada.

$$Y = \frac{1}{(s^2+1)}X$$

Que puede ser reescrito como:

$$Y = H(s)X(s)$$

El resultado de esta ecuación será siempre una convolución:

$$y(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\ d\tau$$

Pues la propiedad es que, tal como se demostrará a continuación, la función $h(\tau)$ es la respuesta del sistema al impulso. Esto permite conocer el comportamiento de un sistema LTI ante cualquier entrada (bajo ciertas condiciones) sin conocer su ecuación, bastará con conocer su respuesta al impulso.

Sabemos que cualquier función puede expresarse mediante una convolución con la delta de Dirac:

$$x(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau$$

terminalo en otro momento.

1.8. Niveles de señal. Decibelios